习题参考

张亚楠[*]

1 第1章：绪论

略

2 第2章：插值法基本原理P48

1. 当 $x = 1, -1, 2$时，$f(x) = 0, -3, 4,$求f(x) 的二阶段多项式

1) 用单项式基地

2) Lagrange基地

3) Newton基地

解答：(1) 设

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

由插值条件得到：

$$a_0 + a_1 * 1 + a_2 * 1 = 0$$
$$a_0 + a_1 * (-1) + a_2 * 1 = -3$$
$$a_0 + a_1 * 2 + a_2 * 4 = 4$$

得到：

$$a_0 = -2.3333 \quad a_1 = 1.5000 \quad a_2 = 0.8333$$

$$L(x) = \sum_{j=0}^{2} y_j * l_j(x) = -3 * \frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)} + 4 * \frac{(x-1)(x+1)}{(2-1)(2+1)}$$

Newton型

$$N(x) = 1.5 * (x-1) + 0.8333 * (x-1)(x+1)$$

Table 1: default

x	f(x)	$f[x_j, x_{j+1}]$	$f[x_0, x_1, x_2]$
1.0000	0	1.5000	0.8333
-1.0000	-3.0000	2.3333	
2.0000	4.0000	0	

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
lnx	-0.916291	-0.693147	-0.510826	- 0.356675	-0.223144

;'

2. 给出f(x) = ln(x)的数值表 用线性插值和二次插值计算ln(0.54)的近似值

线性：-0.6202

二次：-0.6153 (左三点) -0.6168（右三点）

精确值：0.6162

5. 设$f(x) \in C^2[a,b]$, 且$f(a) = f(b) = 0$, 证明:

$$\max_{a\le x\le b} |f(x)| \le \frac{1}{8}(b-a)^2 \max_{a\le x\le b} |f''(x)|$$

解：根据插值余项

$$|f(x) - [f(a) * l_0(x) + f(b) * l_1(x)]| = |\frac{1}{2} \cdot f^{''}(\xi)(x-a)(x-b)|$$

6. 在[-4,4]上给出$f(x) = e^x$ 的等距节点函数表，若用二次插值给出 e^x的近似值，要求误差不超过10^{-6} , 问使用函数表的步长 h 应该取多少?

解答:

$$\begin{aligned}|R_2(x)| &= |\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-x_{j-1})(x-x_j)(x-x_{j+1})| \\ &< \frac{e^4}{6}|h*h*(2h)| \quad \text{or} \quad \frac{e^4}{6}h^3 \\ &< 10^{-6}\end{aligned}$$

记

$$h < 10^{-2} * \sqrt[3]{\frac{6}{e^4}}$$

8. $f(x) = x^7 + x^4 + 3x + 1$, 求

$$f[2^0, 2^1, ..., 2^7]$$

*ynzhang@suda.edu.cn 苏州大学数学科学学院

和

$$f[2^0,2^1,...,2^8]$$

解答：利用

$$f[x_0,x_1,...,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

得到：

$$f[2^0,2^1,...,2^7]=1,\quad f[2^0,2^1,...,2^8]=0$$

14. 求次数小于等于3的多项式$P(x)$，满足：

$$P(0)=0,\quad P^{'}(0)=1,\quad P(1)=1,\quad P^{'}(1)=2$$

解答：构造差商表，注意0, 1均是重节点

x	f(x)	$f[x_j,x_{j+1}]$	$f[x_j,x_{j+1},x_{j+2}]$	$f[x_j,x_{j+1},x_{j+2},x_{j+3}]$
0	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$
0	0	1	1	
1	1	2		
1	1			

$$\begin{aligned}P(x)&=0+1*(x-0)+0*(x-0)^2+1*(x-0)^2(x-1)\\&=x+x^2(x-1)=x-x^2+x^3\end{aligned}$$

14. 求次数小于等于4的多项式$P(x)$，满足：

$$P(0)=P^{'}(0)=0,\quad P(1)=P^{'}(1)=1,\quad P(2)=1$$

解答：构造差商表，注意0, 1均是重节点

x	f(x)	$f[x_j,x_{j+1}]$	$f[x_j,...,x_{j+2}]$	$f[x_j,...,x_{j+3}]$	$f[x_j,...,x_{j+4}]$
0	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{1/4}$
0	0	1	0	-1/2	
1	1	1	-1		
1	1	0			
2	1				

$$P(x)=x^2-x^2(x-1)+\frac{1}{4}x^2(x-1)^2$$

3 第3章：数值逼近

4. 计算$f(x) \in C_{[0,1]}$上的范数

(1) $f(x) = (x-1)^3,$

$$\|f\|_\infty = \max_{0<x<1} |(x-1)^3| = 1, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2(x)dx} = \sqrt{\frac{1}{7}}, \ \|f\|_1 = \int |f(x)|dx = \frac{1}{4}$$

(3) $f(x) = x^m(1-x)^n$

$$\|f\|_\infty = f(\frac{m}{m+n}),$$

$$\|f\|_1 = \int x^m(1-x)^n dx = \frac{1}{m+1}\int (1-x)^n dx^{m+1} = \frac{n}{m+1}\int x^{m+1}(1-x)^{n-1}dx = ...$$

$$= \frac{n(n-1)}{(m+1)(m+2)}\int x^{m+2}(1-x)^{n-2}dx = \frac{n!}{(m+1)(m+2)...(m+n+1)}$$

12. 设$f(x) = x^2 + 3x + 2, \ x \in [0,1]$, 求$\Phi = span\{1, \ x\}$ 中的最佳平方逼近多项式. 若取 $\Phi = span\{1, \ x\}$ ，最佳平方逼近多项式 是什么?

解：设 $P(x) = a + bx,$ 则 a, b, 满足：

$$\begin{bmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1,x\rangle \\ \langle x,1\rangle & \langle x,x\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle 1,f\rangle \\ \langle x,f\rangle \end{bmatrix}$$

即：

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{23}{6} \\ \frac{9}{4} \end{bmatrix} \rightarrow a = 11/6, \ b = 4$$

14. 同上，略。

17. 已知实验数据如下：

x_i	19	25	31	38	44
y_i	19.0000	32.3000	49.0000	73.3000	97.8000

两种方法求解：离散的最佳平方逼近

$$\begin{bmatrix} 5 & 5327 \\ 5327 & 7277699 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 271.436932.15 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow a = 0.972578656906788, \ b = 0.050035124219160$$

4 第4章：数值积分

5. 推导下列矩形公式

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(a) + \frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$$
$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(b) - \frac{f'(\zeta)}{2}(b-a)^2$$
$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\frac{b+a}{2}) - \frac{f''(\zeta)}{24}(b-a)^2$$

6. 若用复合梯形公式计算积分 $\int_0^1 e^x dx,$ 问区间[0,1] 等分才能使截断误差不超过 0.5×10^{-5}? 若改用复合simpson 公式，同样精度需要等分多少?

$$E(T) = \frac{h^2}{12}f''(\xi), \quad E(S) = \frac{1}{180}h^4 f^{(4)}(\theta)$$

7. 如果$f''(x) > 0$, 证明用梯形公式计算积分$I = \int_a^b f(x)dx$ 所得的结果比准确值大，并说明几何意义。

10. 构造gauss型积分公式

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

1. 求积节点：记$w(x) = (x-x_0)(x-x_1) = x^2 + bx + c$, w(x)与1， x 正交，即：

$$\begin{cases} \int_0^1 \frac{1\cdot w(x)}{\sqrt{x}}dx = 0 \\ \int_0^1 \frac{x\cdot w(x)}{\sqrt{x}}dx = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -0.857142857142857 \; c = 0.085714285714286 \quad \rightarrow \\ x_0 = 0.741555747145809, \; x_1 = 0.115587109997048 \end{cases}$$

2. 求系数： 有3次代数精度，f(x) = 1, x 时公式精确成立

$$\begin{cases} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = A_0 + A_1 \\ \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x}}dx = A_0 x_0 + A_1 x_1 \end{cases} \rightarrow A_0 = 0.695709690274908 \; A_1 = 1.304290309725092$$

5 第5章：线性方程组的直接方法

7. 用列主元消去法解线性方程组

$$\begin{cases} 12x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 15 \\ -18x_1 + 3x_2 - x_3 = -15 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

并求系数矩阵的行列式。

解：写出矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 12 & -3 & 3 & 15 \\ -18 & 3 & -1 & -15 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 12 & -3 & 3 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & -1 & 7/3 & 5 \\ 0 & 7/6 & 17/18 & 31/6 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & 7/6 & 17/18 & 31/6 \\ 0 & -1 & 7/3 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & 7/6 & 17/18 & 31/6 \\ 0 & 0 & 22/7 & 66/7 \end{bmatrix}$$

9. 用追赶法求解三对角方程组

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

追赶法用于求解单个方程时，计算量5n; 如果要反复求解固定三对角矩阵，则应当 先进行LU分解; 针对不同的右端项，分别解两个三角形方程组。

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4/5 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6/5 \end{bmatrix}$$

注：也可以选取单位上三角，似无区别

10. 用改进的平方根法求解Ax = b

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = drag \begin{bmatrix} 2 \\ -5/2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

推导过程:

$$A = L * D * L^T \to$$

$$
\begin{aligned}
A_{ij} &= \sum_{k=1}^{n}(L*D)_{ik}L_{jk} = \sum_{k=1}^{n}(\sum_{l=1}^{n}L_{il}*D_{lk})L_{jk} \\
&= \sum_{k=1}^{n}(L_{ik}*D_{kk})L_{jk} = \sum_{k=1}^{j}(L_{ik}*D_{kk})L_{jk} = \sum_{k=1}^{j-1}(L_{ik}*D_{kk})L_{jk} + (L_{ij}*D_{jj})L_{jj} \\
&= \sum_{k=1}^{j-1}(L_{ik}*D_{kk})L_{jk} + (L_{ij}*D_{jj})
\end{aligned}
$$

得到($i \geq j$):

$$i = j = 1; \ \rightarrow \ D_{11} = A_{11}, \ L_{i1} = A_{i1}/D_{11}, \ i = 2:3;$$

$$i = j = 2; \rightarrow \ D_{22} = A_{22} - L_{21}*D_{11}*L_{21} \quad i = 3:3, \ j = 2, \ L_{32} = (A_{32} - L_{31}*D_{11}*L_{21})/D_{22}$$

$$j = 3; i = 3 \rightarrow D_{33} = \sum_{k=1}^{3-1}(L_{3k}*D_{kk})L_{3k}$$

6 第6章: Ax = b迭代法

1. 设线性方程组

$$
\begin{cases}
5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\
-x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\
2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3
\end{cases}
$$

(1) 考查用Jacobi迭代，GS迭代解此方程组的收敛性

解答: 严格对角占优; $x = [-4, 3, 2]^T$

8. 对上述方程组采用SOR迭代，取$w = 0.9$.

9. 设 Ax = b的系数矩阵A对阵正定, 且$0 < \alpha \leq \lambda(A) \leq \beta$, 考查如下迭代公式

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + w(b - Ax^{(k)})$$

证明: 当$0 < w < \dfrac{2}{\beta}$时上述迭代法收敛。

解: 迭代矩阵 $B = I - wA$, 则

$$\lambda_B = 1 - w * \lambda_A$$

验证在已知条件下:

$$\lambda_B < 1, \quad \lambda_B > 1 - \frac{2}{\beta} * \beta = -1$$

则迭代收敛。

7 第7章：非线性方程求根

1. 用二分法求方程$x^2-x-1=0$ 的正根，要求误差小于0.05

解答：记$f(x)=x^2-x-1,$ 计算得到：

$$f(1)=-1; \quad f(2)=1$$

在区间[1,2] 开始使用对分法，对分一次误差减半, 对分5次即可。

2. 求方程 $x^3-x^2-1=0$在 $x_0=1.5$ 附近的根，根据 如下等价形式构建迭代格式，并分析每一种迭代格式的收敛性

1. $x=1+1/x^2$
2. $x=(1+x^2)^{1/3}$
3. $x=1/\sqrt{x-1}$

解答：计算每个迭代函数的导数，绝对值小于1收敛，大于1不收敛。

$x=1.4656$

4. 给定函数$f(x)$, 设对所有x, $0<m\le f^{'}(x)\le M,$ 证明： 对于$0<\lambda<2/M$, 迭代格式 $x_{k+1}=x_k-\lambda f(x_k)$ 均收敛。

提示：考查迭代函数的导数是否小于1

$$g(x)=x-\lambda f(x), \to g^{'}=1-\lambda f^{'}$$

则$|g^{'}|<1,$ 收敛！

8. 分别用二分法和牛顿法求 $x-\tan x=0$的最小正根

解答：x = 4.4934;

提示：首先给出合理的根存在区间$[\pi,\dfrac{3\pi}{2}-\epsilon]$ Newton法的迭代初值选取很重要，例如取4不收敛，取4.5很快收敛。

9. 研究求$\sqrt{a}$ 的Newton 公式

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{a}{x_k}), \quad x_0>0$$

证明对一切k, 迭代序列单调递减。

证明： 首先

$$x_k\ge\sqrt{a}, \quad k\ge 1$$

进而

$$x_{k+1}-x_k=\frac{1}{2}(x_k-\frac{a}{x_k})<0$$

18. 用牛顿法解

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x^2-y^2=1 \end{cases} \qquad X^{(0)}=(1.6,1.2)$$

解答:

$$X^{(k+1)}=X^{(k)}-[J(X^{(k)})]^{-1}F(X^{(k)})$$

按如下方式求解:

$$\begin{cases} J(X^{(k)})\Delta X=-F(X^{(k)}) \\ X^{(k+1)}=X^{(k)}+\Delta X \end{cases} \qquad J(X)=2\begin{bmatrix} x & y \\ x & -y \end{bmatrix}$$

解得:

$$X=1.581138830084190 \quad 1.224744871391589$$

8 第8章：矩阵特征值计算

2. 计算特征值与特征向量，是否相似于对角阵

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

解答:

$$\lambda=\pm1,\ 2$$

逐一求出 特征向量，例如:

$$\begin{pmatrix} 2-2 & -3 & 6 \\ 0 & 3-2 & -4 \\ 0 & 2 & -3-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to [1,0,0]$$

另外两个类似计算:

$$(0,2,1), \quad (-1,1,1)$$

3. 用幂法计算下列矩阵的主特征值和特征向量

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

计算结果

$$\lambda=9.60555 \quad x=(1,0.6,-0.4)$$

4. 利用反幂法求矩阵

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

接近于6的特征值和特征向量

$\lambda = 7.28799213896, \quad x = (0.866432249649031, 0.453057568074350, 0.209842790628303)$

5. 求矩阵

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

对应特征值4的特征向量.

$$\begin{pmatrix} 4-4 & 0 & 0 \\ 0 & 3-4 & 1 \\ 0 & 1 & 3-4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x_0 = ({\color{red}1}, 0, {\color{red}0}) \\ x_1 = ({\color{red}0}, 1, {\color{red}1}) \end{cases}$$

9 第9章：ODE初值问题数值解

2. 用改进的Euler法和梯形法解

$$\begin{cases} y' = x^2 + x - y, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

取步长$h = 0.1$, 计算到 x = 0.5, 并与精确解

$$y = -e^{-x} + x^2 - x + 1$$

相比较

计算结果：

精确解	0	0.0052	0.0213	0.0492	0.0897	0.1435
梯形公式	0	0.0052	0.0214	0.0494	0.0899	0.1437
改进Euler	0	0.0055	0.0219	0.0501	0.0909	0.1450

4. 利用Euler公式计算积分

$$\int_0^x e^{t^2}\,dt$$

在点$x = 0.5,\ 1,\ 1.5,\ 2$ 的近似值

提示：目标积分上限函数满足微分方程

$$y^{'}(x) = e^{x^2}, \quad y(0) = 0$$

对应Euler公式

$$y_{j+1} = y_j + h * f(x_j, y_j) = y_j + \frac{1}{2}e^{(x_j)^2} = y_j + 0.5 * e^{(0.5*j)^2}$$

计算结果：

$$0.5000 \quad 1.1420 \quad 2.5012 \quad 7.2450$$

7. 证明中点公式：

$$y_{n+1} = y_n + h * f\big(x_n + h/2,\ y_n + h/2f(x_n,\ y_n)\big)$$

是二阶的.

提示：Taylor公式推导LTE，能量方法推导误差估计。

8. 求隐式中点公式

$$y_{n+1} = y_n + h * f\left(x_n + h/2,\ \frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right)$$

的绝对稳定区间.

应用到模型方程 $y^{'} = \lambda y$

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda\frac{y_n + y_{n+1}}{2} = y_n + \mu(y_n + y_{n+1}) \to y_{n+1} = \frac{1+\mu}{1-\mu}y_n$$

得到

$$\mu < 0 \to \lambda h < 0 \to \lambda < 0 \quad \text{（问题本身要求）}$$